线性代数　中国科学技术大学 2023 春
线性映射

主讲: 杨金榜
地空楼 525

助教: 苏煜庭、陈鉴、夏小凡

定义 (线性变换的特征值, 特征向量以及特征子空间)

设 $\mathscr{A}$ 为 n 维 $\mathbb{F}$-向量空间 V 上的线性变换. 若存在 $\lambda \in F$ 以及非零向量 $\alpha \in V$, 使得

$$\mathscr{A}\alpha = \lambda\alpha,$$

则称 λ 为 $\mathscr{A}$ 的一个特征值, 称 α 为属于特征值 λ 的一个特征向量. 称

$$V_{\mathscr{A}}(\lambda) := \ker(\mathscr{A} - \lambda\varepsilon) = \{\alpha \in V \mid \mathscr{A}\alpha = \lambda\alpha\}$$

为属于 λ 的特征子空间.

定义 (矩阵的特征值, 特征向量以及特征子空间)

设 A 为 $\mathbb{F}$ 系数的 n 阶方阵. 若存在 $\lambda \in F$ 及非零数组向量 $x \in \mathbb{F}^n$, 使得

$$Ax = \lambda x,$$

则称 λ 为方阵 A 的特征值, 称 x 为属于特征值 λ 的一个特征向量. 称

$$V_A(\lambda) := \{x \in \mathbb{F}^n \mid Ax = \lambda x\}$$

为属于 λ 的特征子空间.

如何求特征值和特征向量

设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 为 $\mathbb{F}$-线性空间 V 的一组基.

$$\left\{\begin{array}{c} V\text{ 上的全体} \\ \text{线性变换} \end{array}\right\} \xleftrightarrow[\substack{1:1 \\ \mathscr{A}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A}]{\text{基}\,\alpha_1,\cdots,\alpha_n} \mathbb{F}^{n\times n}$$

求 $\mathscr{A}$ 的特征值和特征向量可以转换为求 A 的特征值和特征向量.

性质

设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 为 $\mathbb{F}$-线性空间 V 的一组基. 设 V 上的线性变换在基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 下矩阵为 A. 则

1. $\mathscr{A}$ 与 A 有相同的特征值;
2. 若 λ 为 $\mathscr{A}$ 的特征值, 则 $V_{\mathscr{A}}(\lambda) = \{(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)x \mid x \in V_A(\lambda)\}$.

特征值基本性质, 矩阵特征值和特征向量一般求解方法

性质

设 λ 为方阵 A 的特征值. 则

1. $f(\lambda)$ 为 $f(A)$ 的特征值; 特别地, λ^k 为方阵 A^k 的特征值;
2. λ 为方阵 A^T 的特征值;
3. 若 $\lambda \neq 0$, 则 $\frac{1}{\lambda}\det(A)$ 为 A^* 的特征值. 特别地, 若 A 可逆, 则 $\frac{1}{\lambda}$ 为 A^{-1} 的特征值.
4. 若 A 为实矩阵且 $AA^T = 1$, 则 $|\lambda| = 1$.

注: 实矩阵的特征值不一定还是实数!在计算特征值和特征向量时, 总是假设 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

设 A 为 n 阶复方阵. 称行列式 $\det(\lambda I - A)$ 为 A 的特征多项式. 记为 $P_A(\lambda)$. 求解过程分为如下两步:

1. 求 $P_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$, 并做分解
$$P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdot \cdots \cdot (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$$
其中 $\lambda_i \in \mathbb{C}, n_i \geq 1, n_1 + n_2 + \cdots + n_s = n$. 我们称 n_i 为特征值 λ_i 的重数.
2. 给定 $i = 1, \cdots, s$. 解齐次线性方程组 $(\lambda_i I_n - A)X = 0$ 得解空间 $V_A(\lambda_i)$ 或者基础解系.

相似不变量

可以用矩阵来定义线性变换的哪些不变量 (即, 不依赖于基的选取的量).

性质

相似的矩阵具有相同的特征多项式和特征值.

即, 可以用矩阵来定义线性变换的特征多项式和特征值. 有没有其它相似不变量呢?

定理

设 A 为 n 阶复矩阵的 n 个特征值分别为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$(可能有重复的). 则

1. $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$;
2. $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$.

特别地, 迹和行列式都为相似不变量.

证明思路: 展开 $P_A(\lambda)$ 并使用根与系数之间的关系.

推论

一个 n 阶方阵可逆当且仅当其 n 个特征值均不为零.

例

设 n 阶方阵 A 的全体特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$.

- 求 $I+A$ 的全体特征值和行列式;
- 更一般地, 求矩阵 $f(A)$ 的全体特征值.

解题思路: $P_{I+A}(\lambda) = P_A(\lambda - 1)$. 设 $\lambda - f(x) = a_0 \prod_{i=1}^{d} (\alpha_i - x)$. 则

$$\det\left(\lambda I - f(A)\right) = \det\left(a_0 \prod_{i=1}^{d}(\alpha_i I - A)\right) = a_0^n \prod_{i=1}^{d} \det(\alpha_i I - A)$$

$$= a_0^n \prod_{i=1}^{d}\prod_{j=1}^{n}(\alpha_i - \lambda_j) = \prod_{j=1}^{n}\left(a_0 \prod_{i=1}^{d}(\alpha_i - \lambda_j)\right) = \prod_{j=1}^{n}(\lambda - f(\lambda_j))$$

例

若 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ 和 $B = \begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相似. 求 x, y.

提示: 相似不变量.

矩阵的相似对角化

现在我们回到原始问题: 哪些线性变换由伸缩给出?

定义 (可对角化)

相似于对角矩阵的方阵称为可对角化的. 我们称一个线性变换为可对角化的, 若它在某组基下的矩阵可对角化.

问题: 如何判断一个线性变换是否可对角化.

例 (不是所有的线性变换和矩阵都可对角化)

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$

可对角化的判定准则

若 $A = T\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)T^{-1}$. 记 $T = (\eta_1, \cdots, \eta_n)$. 则

1. $\eta_1, \cdots, \eta_n$ 线性无关,
2. $A\eta_i = \lambda_i \eta_i$.

定理 (利用特征向量来判定)

方阵 A 可对角化 $\Leftrightarrow A$ 有 n 个线性无关的特征向量.

有没有简单一点的办法来判断呢?
有时候, 可以用相似不变量来判断.(不需要求特征向量!)

引理

属于不同特征值的特征向量线性无关. 即, 若 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ 为方阵 A 的两两不同的特征值,η_i 为属于 λ_i 的特征向量, 则 $\eta_1, \cdots, \eta_k$ 线性无关.

证明思路: 范德姆行列式不为零!

推论 (利用特征值来判定)

若 n 阶方阵有 n 个两两不同的特征值, 则 A 可对角化.

优点: 不需要求解特征向量; 缺点: 不是充要条件, 有重根咋办?

一般地, 我们可以用特征值的重数来判定是否可对角化.

定义 (代数重数, 几何重数)

设 A 为 n 阶复矩阵的特征多项式有分解

$$P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}.$$

称 n_i 为 λ_i 的代数重数, 称子空间 $V_A(\lambda_i)$ 的维数为 λ_i 的几何重数.

定理 (利用特征值的重数来判定)

1. $1 \le$ 几何重数 $\le$ 代数重数.
2. A 可对角化 $\Leftrightarrow$ 每个特征值的几何重数与代数重数相等.

证明思路: 将 $V_A(\lambda_i)$ 的一组基扩充为整个空间的一组基.

例

什么时候 $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & x\\ 1 & 1 & y\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 可对角化?

解题思路: $P_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda^2-x)$.

- $x\neq 0,1 \Rightarrow$ 三个不同特征值.
- $x=0\Rightarrow 0$ 的代数重数为 2 而几何重数为 1.
- $x=1\Rightarrow -1$ 的重数为 1. 1 的代数重数为 2, 几何重数为 $2(y=1)$ 或者 $1(y\neq 1)$.

定理 (哈密尔顿-凯莱定理)

$P_A(A) = 0.$

特别地, 任意方阵 A 都存在零化多项式. 称次数最小的首一零化多项式为 A 的极小多项式. (注: 极小多项式为相似不变量.)

性质

1. 极小多项式整除其他任意零化多项式. 特别地, 极小多项式为特征多项式的因子.
2. 一个数为特征值当且仅当其为极小多项式的根.

定理 (利用极小多项式)

方阵可对角化当且仅当其极小多项式无重根.

推论 (利用零化多项式)

方阵可对角化当且仅当其存在无重根的零化多项式.

例: 设方阵 A 满足 $A^2 = A, A^2 = I$ 或 $A^3 = A$ 等. 则 A 可对角化.